ПЛОСКОЕ ПОЛЕ ГРАВИТАЦИИ.

Несмотря на то, что данная задача хорошо известна, найти ее полное решение с геодезическими и сшивкой не так-то просто, потому что работы относятся к 60-70-м годам. Метод используем из книги Богородского «Уравнения поля Эйнштейна и их применение в астрономии» (стр. 68, пар.3) и соответственно будем использовать его обозначения, хотя там содержится серьезная ошибка. Будем искать решение для тонкого гравитирующего слоя (ось OZ перпендикулярна плоскости) в таком виде.

$$ds^2 = D(z)dt^2 - A(z)(dx^2 + dy^2) - C(z)dz^2 \qquad (1)$$

Сначала найдем решение в полупространстве $z > 0$ в пустоте. Задача статическая. Уравнения Гильберта-Эйнштейна в вакууме $R_{ij} = 0$ дают систему уравнений (штрих – производная по $z, c = 1$):

$$R_{tt} = \frac{1}{2C}\left(D'' - \frac{D'^2}{2D} - \frac{C'D'}{2C} + \frac{A'D'}{A}\right) = 0 \qquad (2)$$

$$R_{xx} = R_{yy} = \frac{1}{2C}\left(-\frac{A'D'}{2D} + \frac{A'C'}{2C} - A''\right) = 0 \qquad (3)$$

$$R_{zz} = -\frac{D''}{2D} + \frac{D'^2}{4D^2} + \frac{C'D'}{4CD} + \frac{A'C'}{2AC} - \frac{A''}{A} + \frac{A'^2}{2A^2} = 0 \qquad (4)$$

Упростим выражение по такой формуле: $R_{zz} + R_{tt} * \frac{C}{D} - 2 * R_{xx} * \frac{C}{A}$. Получим:

$$\frac{2A'}{A}\left(\frac{D'}{D} + \frac{A'}{2A}\right) = 0 \qquad (5)$$

Уравнение (5) имеет 2 решения:

$$\frac{A'}{A} = 0\,, \quad \text{и} \quad \frac{D'}{D} + \frac{A'}{2A} = 0$$

1. ПЕРВОЕ РЕШЕНИЕ (плоское) дает $A = 1$. Тогда из (2):

$$\frac{D''}{D'} - \frac{D'}{2D} - \frac{C'}{2C} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\ln(D') = \frac{\partial}{\partial z}\left(ln\sqrt{D} + ln\sqrt{C}\right) \qquad (6)$$

$$C(z) = \frac{D'^2}{D(z)} \qquad (7)$$

Решение ищем, опуская константы, которые потом можно убрать под дифференциал, меняя координатную систему. (4) не дает ничего нового. Общее решение в первом случае выглядит так:

$$ds^2 = D(z)dt^2 - dx^2 - dy^2 - \frac{D'^2}{D(z)}dz^2 \qquad (8)$$

$D(z)$ – любая положительная дифференцируемая функция и не константа. Прямая проверка показывает, что $R_{ij} = 0,\ R^l_{ijk} = 0$, что указывает на плоское пространство-время. Обычно рассматривают дополнительные условия:

$$-g_{zz} = C(z) = \frac{D'^2}{D(z)} = 1 \qquad (9)$$

Физического смысла я в нем не нашел, похоже это координатное условие, делающее метрику определенной. (Можно было взять и гармонические условия). Решая уравнение (9) относительно D(z) получим:

$$ds^2 = (kz + 1)^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (10)$$

Найдем все геодезические:

$$2k\frac{dt}{ds}\frac{dz}{ds}+\frac{d^2t}{ds^2}(kz+1)=0 \qquad (11a)$$

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d^2y}{ds^2}=0 \qquad (11b)$$

$$\frac{d^2z}{ds^2}+k\left(\frac{dt}{ds}\right)^2(kz+1)=0 \qquad (11c)$$

Еще одно условие из метрики, фиксируя координаты x, y.

$$ds^2=(kz+1)^2dt^2-dz^2 \qquad (11d)$$

Совмещая (11c) и (11d) , получаем:

$$\frac{d^2z}{ds^2}=-\frac{k}{(kz+1)}\left(1+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)$$

Для малых $kz\approx 0$ и пренебрегая скоростями, получаем $\frac{d^2z}{ds^2}\approx\frac{d^2z}{dt^2}\approx -k=-g$. Получаем ньютоновское приближение .

2. ВТОРОЕ РЕШЕНИЕ

$\frac{D'}{D}+\frac{A'}{2A}=0$ приводит к метрике в общем виде:

$$ds^2=D(z)dt^2-\frac{(dx^2+dy^2)}{D^2}-\frac{D'^2}{D(z)^5}dz^2 \qquad (12)$$

$D(z)$ – ***любая*** положительная дифференцируемая функция и не константа. Это пространство не плоское. $R_{ij}=0$, $R^l_{ijk}\neq 0$ и отвечает «истинной» гравитации.

2.1 .Если выбирать также систему координат, чтобы $g_{zz}=-1$**,** получаем метрику в таком виде:

$$ds^2=\frac{dt^2}{(kz+1)^{\frac{2}{3}}}-(kz+1)^{\frac{4}{3}}(dx^2+dy^2)-dz^2 \qquad (13)$$

(например, компонента $R^1_{010}=\frac{2k^2}{9(kz+1)^{\frac{8}{3}}}$) . Это так называемое решение Тауба. Геодезические и ньютоновское приближение:

$$2k\frac{dt}{ds}\frac{dz}{ds}-3(kz+1)\frac{d^2t}{ds^2}=0 \qquad (14a)$$

$$4k\frac{dx}{ds}\frac{dz}{ds}+3(kz+1)\frac{d^2x}{ds^2}=0\ , \qquad 4k\frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds}+3(kz+1)\frac{d^2y}{ds^2}=0 \quad (14b)$$

$$3z(kz+1)^{\frac{5}{3}}\frac{d^2z}{ds^2}-2k(kz+1)^2\left(\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\right)-k\left(\frac{dt}{ds}\right)^2=0 \qquad (14c)$$

Или фиксируя координаты x, y:

$$3(kz+1)^{\frac{5}{3}}\frac{d^2z}{ds^2}-k\left(\frac{dt}{ds}\right)^2=0 \qquad (14d)$$

Добавим еще одно уравнение, следующее из метрики (13)

$$1=\frac{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2}{(kz+1)^{\frac{2}{3}}}-\frac{\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dx}{ds}\right)^2}{(kz+1)^{\frac{4}{3}}}-\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 \qquad (14e)$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = \frac{k\left(\frac{dt}{ds}\right)^2}{3(kz+1)^{\frac{5}{3}}} = \frac{k}{3(kz+1)^{\frac{5}{3}}} \frac{1}{\frac{1}{(kz+1)^{\frac{2}{3}}} - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \qquad (14f)$$

Однако видно, что в слабых полях, рассматривая падение только по оси Z, пренебрегая скоростями , около самой плоскости OZ ($zk \approx 0$), из **(14f)** получим очень странное выражение для ускорения $\frac{d^2z}{ds^2} > 0$, что соответствует отталкиванию, если $k > 0$ при $z > 0$. То есть метрика в данных координатах не переходит в ньютоновское выражение для тяготеющей плоскости.

Инвариант: $I_1 = R_{ijkl}R^{ijkl} = \frac{64k^4}{27(kz+1)^4}$

2.2 Возьмем метрику (12) в таком виде:

$D(z) = (kz+1)^{2/3}$

$$ds^2 = (kz+1)^{\frac{2}{3}}dt^2 - \frac{(dx^2+dy^2)}{(kz+1)^{\frac{4}{3}}} - \frac{dz^2}{(kz+1)^4} \qquad (15)$$

Геодезические:

$$2k\frac{dt}{ds}\frac{dz}{ds} + 3(kz+1)\frac{d^2t}{ds^2} = 0 \qquad (16a)$$

$$4k\frac{dx}{ds}\frac{dz}{ds} - 3(kz+1)\frac{d^2x}{ds^2} = 0\ , \qquad 4k\frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds} - 3(kz+1)\frac{d^2y}{ds^2} = 0 \quad (16b)$$

Четвертую геодезическую выпишу уже в предположении, что движение частицы вдоль оси Z $(x = y = const)$.

$$\frac{d^2z}{ds^2} = \frac{k}{3}[6\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dt}{ds}\right)^2(kz+1)^4] \qquad (16c)$$

Или, учитывая: $\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\left(\frac{dt}{ds}\right)^2$, получим:

$$\frac{d^2z}{ds^2} = \frac{k}{3}[6\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - (kz+1)^4]\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \qquad (17)$$

Добавим еще одно уравнение (фиксируя x, y), следующее из (15):

$$1 = (kz+1)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \frac{\left(\frac{dz}{ds}\right)^2}{(kz+1)^4} = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2\left((kz+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}{(kz+1)^4}\right) \qquad (18)$$

Совмещая (17) и (18) получим:

$$\frac{d^2z}{ds^2} = \frac{\frac{k}{3}\left[6\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - (kz+1)^4\right]}{(kz+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}{(kz+1)^4}} \qquad (19)$$

В ньютоновском приближении около поверхности Z должно быть ускорение – $\boldsymbol{g}$. Пренебрегая скоростями (нерелятивистский случай), и считая $\boldsymbol{kz \approx 0}$ получим:

$$\frac{d^2z}{ds^2} \approx \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{k}{3} = -g \qquad (20)$$

Окончательно метрика для плоскосимметричного полупространства (совсем не такая, как у Богородского на стр. 71, а такая):

$$ds^2 = (3gz+1)^{\frac{2}{3}}dt^2 - \frac{(dx^2+dy^2)}{(3gz+1)^{\frac{4}{3}}} - \frac{dz^2}{(3gz+1)^4} \qquad (21)$$

Инвариант Кретчмана для такой геометрии: $I_1 = R_{ijkl}R^{ijkl} = \frac{64(3g)^4(3gz+1)^4}{27}$

3. Связь ускорения g с плотностью вещества.

Эту связь можно найти по аналогии с расчетами Богородского на стр. 68, исходя из ньютоновского приближения. Пусть плоский бесконечный слой вещества имеет толщину $2h$ и плотностью $\boldsymbol{\varepsilon}$. Возьмем тонкое кольцо радиуса r. Масса кольца:

$$\boldsymbol{dM = 2\pi r dr 2h\, \varepsilon}$$

На высоте z от плоскости на единицу массы действует сила в направлении центра кольца :

$$dF = \frac{G\varepsilon z 2h * 2\pi r dr}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Интегрирование по r от 0 до ∞ дает связь:

$$g = 4\pi h G\varepsilon = \frac{Eh}{2} \quad , E = 8\pi G\varepsilon \qquad (22)$$

4. ВУТРЕННЕЕ РЕШЕНИЕ

Решение опять ищем в таком виде:

$$ds^2 = D(z)dt^2 - A(z)(dx^2+dy^2) - C(z)dz^2 \qquad (1)$$

Уравнения Гильберта-Эйнштейна в смешанных координатах:

$$R_i^i - \frac{1}{2R} = 8\pi G T_i^j$$

$$T_0^0 = \varepsilon\,,\ T_x^x = T_y^y = -p, \qquad T_z^z = 0$$

Давление на границах области равны нулю, поэтому я пренебрегаю давлением по оси Z внутри вещества. Уравнения дают такую независимую систему:

$$\frac{2AA'C' + C(A'^2 - 4AA'')}{4A^2C^2} = 8\pi G\varepsilon \qquad (23)$$

$$-\frac{2A^2CDD'' - A^2CD'^2 + (ACA' - A^2DC')DD' + (2AA'' - A'^2)CD^2 - AD^2A'C'}{4A^2C^2D^2} = -8\pi G p \qquad (24)$$

$$-\frac{2AA'D' + A'^2D}{4A^2CD} = 0 \qquad (25)$$

Из (25) следует два уравнения:

$$A' = 0\,, \qquad 2AD' + A'D = 0$$

Первое приводит к весьма экзотическому случаю, когда плотность энергии ноль, а давление вдоль плоскости есть. Второе имеет решение:

$$A = \frac{1}{D^2} \qquad (26)$$

(Постоянную опускаем). Из (23) получаем:

$$\frac{A'C'}{2AC^2} - \frac{A''}{AC} + \frac{A'^2}{4A^2C} = 8\pi G\varepsilon = E \qquad (27)$$

В общем виде такую систему решить не удаётся. Поэтому требуется еще одно координатное условие.

4.1 . Пусть таким условием будет : $\boldsymbol{C(z) = 1.}$ Тогда (27) упрощается:

$$-\frac{A''}{A} + \frac{A'^2}{4A^2} = E \qquad (28)$$

Поскольку $\frac{d}{dz}\left(\frac{A'}{A}\right) = \frac{A''}{A} - \frac{A'^2}{A^2}$, (28) переписывеется:

$-\frac{d}{dz}\left(\frac{A'}{A}\right) - \frac{3A'^2}{4A^2} = E$, или меняем $\frac{A'}{A} = u$

Получаем такое обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$-u' - \frac{3u^2}{4} = E \qquad (29)$$

Решение этот уравнения:

$$u = \frac{A'}{A} = -2\sqrt{E/3}\, tg\left(\frac{\sqrt{3E}(z+C_1)}{2}\right) \qquad (30)$$

Решение (3) относительно $A(z)$ дает:

$$A(z) = \cos\left(\frac{\sqrt{3E}(z+C_1)}{2}\right)^{\frac{4}{3}}, \qquad (31)$$

$$D(z) = \frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\sqrt{3E}(z+C_1)}{2}\right)^{\frac{2}{3}}} \qquad (32)$$

Получаем метрику внутри вещества при нулевом давлении по оси Z в таком виде:

$$ds^2 = \frac{dt^2}{\cos^{2/3}\psi} - (dx^2 + dy^2)\cos^{4/3}\psi - dz^2 \qquad (33)$$

Где $\psi = \frac{\sqrt{3E}(z+C_1)}{2}$

Прямая проверка показывает компоненты тензора Эйнштейна такие:

$$G_0^0 = E = 8\pi G\varepsilon$$

$$G_1^1 = G_2^2 = \frac{E}{4} = 2\pi G\varepsilon = -P\ ,$$

$$G_3^3 = 0$$

Компоненты тензора натяжений параллельные плоскости имеют другой знак, чем обычно (отрицательный). По крайней мере, данное внутреннее решение вполне допустимо на границе слоя, там, где проходит сшивка метрик.

4.2 . Найдем внутреннее решение в общем виде. Для этого в (24) подставим (26) (опуская постоянную) $A = \frac{1}{D^2}$ и наш вывод $G_2^2 = \frac{E}{4}$. Тогда общий вид метрики:

$$ds^2 = D(z)dt^2 - \frac{(dx^2+dy^2)}{D^2} - C(z)dz^2 \qquad (34)$$

Где $D(z)$ – ***произвольная*** дифференцируемая (четная) функция, не константа, а $C(z)$ определяется из дифференциального уравнения (если подставить все в (24)):

$$\frac{2D''}{D} - \frac{5D'^2}{D^2} - \frac{C'D'}{CD} = EC \qquad (35)$$

Замечу, что если рассматривать идеальную жидкость, то можно вместо (24) добавить еще одно уравнение

$$\nabla T_i^j = 0 \quad , \quad \frac{dp}{dz} = -\frac{D'}{2D}(p+\varepsilon) \quad ()$$

что дает связь давления и плотности :

$$p = \frac{C_3}{\sqrt{D}} - \varepsilon \quad , \quad 8\pi G p = \frac{C_3}{\sqrt{D}} - E \qquad ()$$

Решение приведено **Someone** здесь.
http://dxdy.ru/post194332.html?sid=a69112677501351224 69f5feab4329c4#p194332

Там возникает бета-функция.

4.3. **Внутреннее решение в общем виде** при координатном условии $C(z) = 1$.

Имеем такую систему из первого и 4-го уравнения полной системы.

$$-\frac{A''}{A} + \frac{A'^2}{4A^2} = E \qquad (36)$$

$$-\frac{A'D'}{2AD} - \frac{A'^2}{4A^2} = -8\pi G T_z^z = -P(z) \qquad (37)$$

Поскольку $\left(\frac{A'}{A}\right)' = \frac{A''}{A} - \frac{A'^2}{A^2}$, меняя $\frac{A'}{A} = u$, получим:

$$u' + \frac{3}{4}u^2 = -E \qquad (38)$$

$$\frac{D'}{D} = \frac{2P}{u} - \frac{u}{2} \qquad (39)$$

(38) дает решение:

$u = -2\sqrt{E/3}\, tg\left(\frac{\sqrt{3E}(z+C_1)}{2}\right)$, откуда:

$$A = \cos^{4/3}\psi \quad , \quad \psi = \frac{\sqrt{3E}(z+C_1)}{2} \qquad (40)$$

Из (39):

$$\ln(D) = -\sqrt{E/3}\int ctg(\,\frac{\sqrt{3E}(z+C_1)}{2})P(z)dz + \sqrt{3/E}\int tg\left(\frac{\sqrt{3E}(z+C_1)}{2}\right)dz + C_3^*$$

$$D(z) = \frac{\mathrm{C}_3 * \exp\left\{-\int \frac{P(\psi)}{E} ctg(\psi) d\psi\right\}}{\cos^{2/3}\psi} \qquad (41)$$

4.4. **Возьмем ТЭИ** в таком виде: $T_0^0 = \varepsilon$, $T_x^x = T_y^y = -p_1$, $T_z^z = -p = const$, $p > 0$.

То есть давление по оси Z в виде ступеньки – внутри слоя постоянная, а на границе ноль. Это частный случай предыдущего рассмотрения. Координатное условие: $C(z) = 1$. Тогда исходя (41) интегрируется и получается компонента $D(z)$ (опуская постоянный множитель):

$$D(z) = \frac{1}{\sin^{2P/E}\psi * \cos^{2/3}\psi} \qquad (42)$$

$$A(z) = \cos(\psi)^{\frac{4}{3}} \qquad (43)$$

$$\psi = \frac{\sqrt{3E}(z+C_1)}{2}$$

Прямая проверка дает: $G_0^0 = E, \;\; G_z^z = -P$

Остальные компоненты тензора напряжений вдоль плоскости:

$$T_x^x = T_y^y = \frac{E}{4} - \frac{3}{4}P\left[1 + \left(\frac{P}{E} + 1\right)\text{ctg}^2\psi\right] \qquad (44)$$

То есть знак у компонент в общем случае отрицательный, как обычно и бывает, давление положительно.

5. СШИВКА ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО РЕШЕНИЯ.

Итак, мы имеем две внешние (вакуумные) плоско-симметричных метрики (8) и (21).

5.1. Рассмотрим сначала метрику, имеющую ненулевой тензор кривизны в виде (21):

$$ds^2 = (kz+1)^{\frac{2}{3}}dt^2 - \frac{(dx^2+dy^2)}{(kz+1)^{\frac{4}{3}}} - \frac{dz^2}{(kz+1)^4} \qquad (21)$$

Чтобы сшить с внутренним решением (34) примем $D(z) = \; (kz+1)^{\frac{2}{3}}$. Тогда уравнение (35) упрощается:

$$-\frac{k\left(C'(kz+1)+4kC\right)}{6(kz+1)^2C^2} = \frac{E}{4} \qquad (45)$$

И его решение:

$$C(z) = \frac{4k^2}{3(kz+1)^2(C_1k(kz+1)^2-3E)} \qquad ,\; C_1 - \text{постоянная интегрирования} \qquad (46)$$

Метрика внутренняя приобретает вид:

$$ds^2 = (kz+1)^{\frac{2}{3}}dt^2 - \frac{(dx^2+dy^2)}{(kz+1)^{\frac{4}{3}}} - \frac{4k^2dz^2}{3(kz+1)^2(C_1*k(kz+1)^2-3E)} \qquad (47)$$

Как видно, сравнивая (21) и (38) метрические компоненты $g_{tt}, \; g_{xx}, \; g_{yy}$, сшиваются непрерывно и гладко на границе, если $z = h$. g_{zz} также должна сшиваться на границе. Приравнивая эти компоненты на границе

при $z = h$:

$$\frac{4k^2}{3(kh+1)^2(C_1*k(kh+1)^2-3E)} = \frac{1}{(kh+1)^4}$$

$$C_1 = \frac{\left(\frac{4}{3}k^2(kh+1)^2+3E\right)}{k(kh+1)^2} \qquad (48)$$

Таким образом, полное (внутреннее и внешнее) решение для данного вида ТЭИ найдено. Для ньютоновского случая, как мы выяснили в разделе **3)** , $k = 3g = Eh/2$. Мы рассматривали все время случай $z \geq 0$. Для отрицательных значений z требуется в метрике просто поставить модуль $|z|$.

5.2. Второй случай с плоской внешней метрикой более сложный.

Мне не удалось подобрать так, толщину и тензор натяжений, что 2 решения внутреннее и внешнее сшивались непрерывно. Сравним теперь внутреннее решение (34) (для нулевого поперечного давления) и внешнее (8) (тензор кривизны равен 0) для тонкого слоя $-h < z < h$:

$$ds^2 = D(z)dt^2 - \frac{(dx^2+dy^2)}{D^2} - C(z)dz^2 \qquad (34)$$

$$ds^2 = \overline{D}(Z)dT^2 - dX^2 - dY^2 - \frac{\overline{D}'^2}{\overline{D}(Z)}dZ^2 \qquad (8)$$

Будем искать обе метрики при координатном условии $g_{zz} = -1$. Внешнее мы уже находили:

$$ds^2 = (gz+1)^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (10)$$

Внутреннее из 4.3:

$$ds^2 = D(z)dt^2 - \frac{(dx^2+dy^2)}{\cos(\psi)^{\frac{4}{3}}} - dz^2 \qquad (34)$$

$$D(z) = \frac{\mathrm{C}_3 * \exp\left\{-\int \frac{P(\psi)}{E} ctg(\psi)d\psi\right\}}{\cos^{2/3}\psi} \qquad (49)$$

Возьмем давление по OZ в виде

$$P = -2E * \sin(\psi) * ln(1+gh)$$

$$\psi = \frac{\sqrt{3E}(z-h)}{2}\ ,\ g = \frac{Eh}{2}$$

Давление на границе $z = h$ нулевое. Тогда внутреннюю метрику получаем в таком виде:

$$ds^2 = \frac{(1+\mathrm{gh})^{2\sin(\psi)}}{\cos^{2/3}\psi}dt^2 - (dx^2+dy^2)\cos^{4/3}\psi - dz^2 \qquad (50)$$

Метрика сшивается непрерывно с (10) при $z = h$. Тензор натяжений вдоль плоскости:

$$T_x^x = T_y^y = -\frac{E}{4}(6\ln(1+gh) * \cos^2\psi + 3\sin\psi * \ln(1+gh) - 1) \qquad (51)$$